# Fonctions complexes

## de variables complexes « holomorphe »

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\quad z \longrightarrow f(z)$

On a déjà rencontré $z^n$ : monome

$\sum_0^N a_n z^n$ : polynome

$\sum_0^\infty$ " : « serié »

× **Fonction continue sur $\mathbb{C}$**

$$\forall \varepsilon, \text{ il existe } \eta \text{ tq } \forall z \quad |z-z_0| < \eta \Rightarrow |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$$

× **Dérivabilité :**

× Version 1 :

$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z - z_0}$ existe et vaut "nb derivé" $= L$

ou

$\lim_{\xi \to 0} \frac{f(z+\xi)-f(z_0)}{\xi}$ existe

× Version 2 :

$\frac{f(\xi+z)-f(z_0)}{\xi} = L + \varepsilon(\xi) \quad \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(z+\xi) - f(z_0) = \xi L + \xi\, \varepsilon(z)$

$\Leftrightarrow \quad f(z+\xi) = f(z_0) + \xi L + \xi\, \varepsilon(z)$

Developpement limité à l'ordre 1.

→ Si c'est vrai $\forall z_0 \in U$, $f$ est dérivable (V°1) $\}$ sur $U$.
différentiable (V°2)

Question : $z \to z^n$ dérivable ?

on a : $(z+\varepsilon)^n = z^n + C_n^1 z^{n-1}\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 z^{n-2}$

$= \binom{n}{1} z^{n-1}\varepsilon$

$= z^n + \varepsilon z^{n-1} + \varepsilon^2(\dots) + \varepsilon^3(\dots)$

Les monomes (type $z^n$) sont dérivables sur $\mathbb{C}$.
Les polynômes " sur $\mathbb{C}$.
Les series " dans le disque de convergence
Il en resulte :

$\sum a_n (z-z_0)^n$ dérivable dans un cercle de centre $z_0$.

exponentiel, sin, cos, ch, sh ...

Corollaire :

On peut montrer que :

- la somme de 2 fonctions dérivables est dérivable : $f+g$
- le produit " est dérivable $(fg)' = fg' + f'g$.
- le quotient " est dérivable : $f/g$

Preuve :

$f(z+\varepsilon) = f(z) + \varepsilon L_1 + \varepsilon\, \varepsilon_f(\varepsilon)$ $\quad L_1 = f'(z)$

$g(z+\varepsilon) = g(z) + \varepsilon L_2 + \varepsilon\, \varepsilon_g(\varepsilon)$. $\quad L_2 = g'(z)$.

Multiplicat° $\to$ $(f.g)(z+\varepsilon) = f(z)g(z) + \varepsilon\,(f(z)L_2 + g(z)L_1)$

$= fg(z) +$ "

Addition $\to$ $(f+g)(z+\varepsilon)$

Composition de fonctions $f \circ g$.

$$\begin{cases} g \text{ derivable en } z \\ f \text{ derivable en } Z = g(z). \end{cases}$$

Alors $f \circ g$ est derivable et : $f'(g(z)) \cdot g'(z) =$ dérivée en $z$.

Preuve :

$$g(z+\xi) = \underbrace{g(z)}_{Z} + \xi g'(z) + \xi \cdot \varepsilon_g(\xi)$$

$$Z + \boxed{\xi(g'(z) + \varepsilon_g)} \leftarrow \text{petit accroissem}^{t} \text{ ecrit } \eta \text{ dans } f(z).$$

$$f(Z+\eta) = f(Z) + \eta f'(Z) + \eta \varepsilon_f(\eta)$$

d'où :

$$f(g(z) + \xi g'(z) + \xi \varepsilon(\xi)) = f(g(z)) + \underbrace{(\xi g'(z) + \xi \varepsilon(\xi))}_{\eta} f'(g(z)) + \ldots$$

$$= f(g(z)) + \xi g'(z) \cdot f'(g(z)) + \ldots$$

Association complexe - Réel.

Interpretation de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\longrightarrow$
$$\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longrightarrow f(z) \\ x+yi \longrightarrow P(x;y) + iQ(x;y) \end{cases}$$

Par abus de notation on note :

$f(z) = P(x;y) + iQ(x;y)$

Dérivées partielles =

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \quad \frac{\partial P}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : \quad \frac{\partial P}{\partial y} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$\longrightarrow$ Jacobienne : $J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} dP \\ dQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \\ \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

## Dérivabilité

Rappel : $f(z+\varepsilon) = f(z) + \varepsilon f'(z) + o(\ )$

$\varepsilon = h + i0$ réel

$z + \varepsilon = \boxed{x+h} + iy$

$\varepsilon = 0 + ik \longrightarrow z + \varepsilon = x + iy + ik$
$= x + i(y+k)$

h accroissem$^t$ en x

k accroissement en y

$f(z+ik) = f(z) + ik f'(z) + o(..)$
$= f(z) + k\,(i f'(z)) + o(.)$
$= f(z) + k \dfrac{\partial f}{\partial y} + o(.)$

$\Leftrightarrow f'(z) = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow f'(z) = -i \dfrac{\partial f}{\partial y}$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}}$$

× Relation de Cauchy Reimann : $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0}$
(condit de dérivabilité)

× Moyen Mnémotechnique : $\begin{bmatrix} a = \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \\ b = \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ alors cela signifie que la fonction est dérivable au sens complexe.

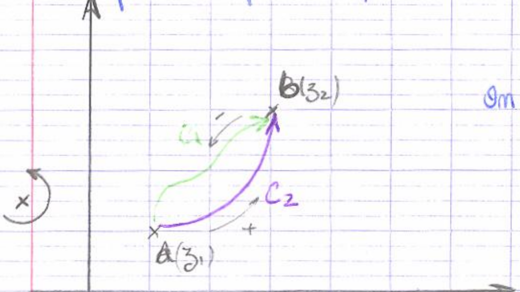
Si on a pas cette relat° a/b, alors ce n'est pas une fct° dérivable en complexe.

## Primitives complexes

× Pour $z^n$ : $\dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $z^n$

Cela nous permet de l'appliquer aux polynômes et aux séries.

• Pour 2 points du plan complexe :




On ne peut pas calculer $\displaystyle\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$

Integrat° sur chemin $C_2^+$

$\displaystyle\int_{C_2^+} f(z)\,dz$

$\begin{cases} t = t_0 : z(t_0) = a \\ t = t_1 : z(t_1) = b \\ t_0 < t < t_1 : z(t) \text{ parcourt la courbe.} \end{cases}$

$z = x(t) + iy(t)$
paramétrisat° de z.

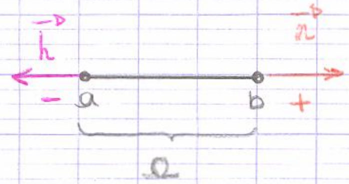
$= \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(z(t))\,dz(t) = \int_{t_0}^{t} f\circ g(t)\cdot z'(t)\,dt$

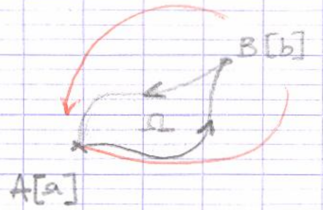
suite $\displaystyle\int_{C^+} f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} P(x(t);y(t)) + i\,Q(x(t);y(t))\,(x'+y')\,dt$ $\quad\left|\begin{array}{l} x'\,dt = dx \\ y'\,dt = dy \end{array}\right.$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (Pdx - Qdy) + i\int_{t_0}^{t_1} (Pdy + Qdx)$$

<u>Formule de Reimann:</u>

$$\int_{\partial\Omega} w = \int_{\Omega} dw \longrightarrow$$




$$\int_C \overbrace{(Pdx - Qdy)}^{w} \text{ bord "}\partial\Omega\text{"} = \int_\Omega d(Pdx - Qdy)$$

$\uparrow$ Courbe

$$dw = d(Pdx) - d(Qdy) = dPdx + \underbrace{\cancel{d(dx)}}_{=0} - (dQdy + \underbrace{\cancel{d(dy)}}_{=0})$$

Memotechnique =

$$\begin{cases} dP\wedge dx = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x}dx + \dfrac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx = \dfrac{\partial P}{\partial x}\underbrace{dx\wedge dx}_{=0} + \dfrac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx \\[2ex] dQ\wedge dy = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}dx + \dfrac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy + \dfrac{\partial Q}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dy}_{=0} \end{cases}$$

$$dw = \partial P\wedge dx - \partial Q\wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx - \frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\underbrace{dx\wedge dy}_{= -dy\wedge dx}$$

<u>Definition =</u>

- ensemble connexe = reunion non disjointe

connexe 

non connexe 

- ensemble simplement connexe =

simplement connexe. 

lacet
point

$\longrightarrow$ un cercle peut être contracté en un point


non <u>simplement</u> connexe.

mais qd même connexe.

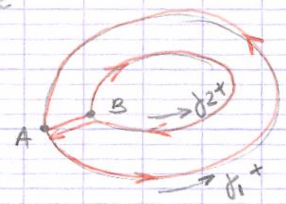
Corollaire :

si on a une fonction holomorphe.

si on peut déformer CONTINUEMENT un chemin $\gamma_1$ en $\gamma_2$

alors =

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

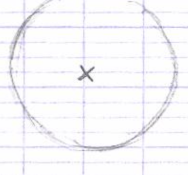




$$\int_{\gamma_1^+ \cup AB \cup \gamma_2^- \cup BA} f_{\text{holomorphe}} \cdot dz = 0$$ puisque intégrale de $A$ à $A$.

$\gamma_1^+ \cup AB \cup \gamma_2^- \cup BA = AA$

$$\Leftrightarrow \int_{\gamma_1}^{+} f dz + \int_A^B f dz + \int_{\gamma_2}^{-} f dz + \int_B^A f dz = 0 \quad \Leftrightarrow \int_{\gamma_1}^{+} f dz = \int_{\gamma_2}^{+} f dz$$

Quelques calculs.



$C(0,R)$

Paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\sin t \end{cases} \quad \text{ou} \quad z(t) = R(\cos t + i\sin t) = Re^{it}$$

Fonction holomorphe.

$$\int_C z^n\,dz = 0$$

$z^n$ dérivable donc fonction holomorphe

$n \geq 0$ pour que ce soit " de $\mathbb{C}$.

Puisque cercle réductible en un point

Cercle : fermé = simplement connexe.

$\int_{\text{point}} = 0$.

Cas $n < 0$, $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2} \dots$ pas défini en 0, de ds $\mathbb{C}^*$ pas réductible au point 0, pas simplement connexe.

• 1er cas : $n = -1 \to \frac{1}{z}$

$0 \leq t < 2\pi$ $\begin{cases} z = Re^{it} \\ dz = iRe^{it}\,dt \end{cases}$ $\qquad \frac{dz}{z} = \frac{iRe^{it}\,dt}{Re^{it}} = i\,dt.$

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2i\pi \neq 0.$$

Integrale curviligne $\qquad$ Integrale classique

• 2ème cas : $n \neq -1$

$$\int_C \frac{1}{z^n}\,dz = \int_C \frac{1}{z^{n-1}} \cdot \int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^{n-1}} \cdot \frac{1}{e^{i(n-1)t}} \int_0^{2\pi} i\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{i}{R^{n-1}} e^{-i(n-1)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{R^{n-1}} \times \frac{1}{-(n-1)} \left[ e^{-i(n-1)t} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{R^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-n} \left[ \underbrace{e^{i(1-n)2\pi}}_{=1} - \underbrace{e^{0}}_{=1} \right] = 0$$

$$\int_{\text{cercle}} z^n = 0 \text{ sauf pour } n = -1 \Leftrightarrow \int \frac{1}{z}\,dz = 2i\pi$$

Théorème : (Cauchy)

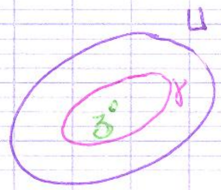
Soit $U$ simplement connexe (sans trou).

$\gamma$ chemin fermé

$f$ holomorphe dans $U$.

$z$ strictement à l'intérieur de $\gamma$.

Alors $\boxed{f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.}$ Formule de Cauchy.



Signification très importante :

f holomorphe, connue « seulement » sur $\gamma$.

Alors f est connue partout à l'intérieur de $\gamma$.

Corollaire :

f fonction complexe de U ds $\mathbb{C}$

alors f holomorphe sur U $\Leftrightarrow$ f analytique sur U. (dev able en série entière)

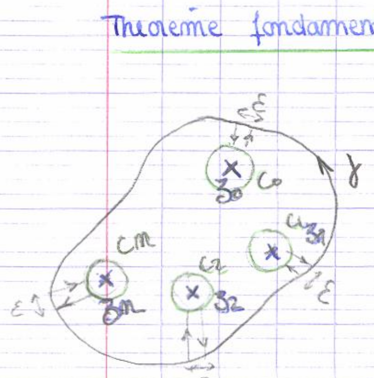
Analytique = Pour chaque $z_0$ de U, on peut trouver une série entière (dt les coefficients dépendent de $z_0$), tq :

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

avec $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$ où cette intégrale se déduit de $\frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(w)}{w-z}\,dz$ par dérivation sous l'intégrale

(Rappel : dévelop. Taylor : $f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\dots$ )

Théorème fondamental :




Soit $\gamma$ une courbe fermée et f une fonction complexe définie sur tout le domaine contenu dans $\gamma$ sauf peut-être en n points $z_0, z_1, z_2 \dots z_{n-1}$.

On suppose que :

* f n'est pas dérivable en $z_0, z_1, z_2 \dots$
* les points $z_0, z_1 \dots z_n$ ne sont pas sur $\gamma$.

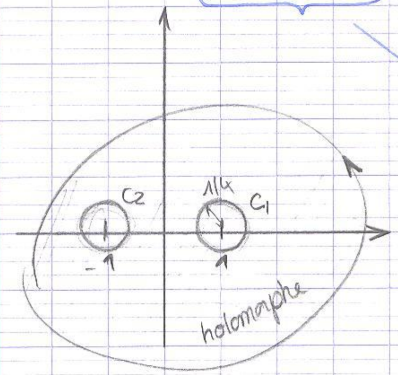
Alors

$$\underbrace{\int_{\gamma^+} f(z)\,dz}_{\text{intégral du grd cercle.}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \int_{C_n^+} f(z)\,dz}_{\text{Intégral des pts cercles}}$$

où $C_i^+$ est un cercle quelconque ne coupant pas $\gamma$, décrit ds le sens +.

Exemple

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \underbrace{\frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{(z+1)}}$$




$$DES = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{z+1}$$

$$\int_{\text{grd cercle}} \frac{1}{z^2-1}\,dz = \int_{C_1} \frac{\alpha}{z-1}\,dz + \int_{C_2} \frac{\beta}{z+1}\,dz$$

Paramétrage du cercle 1 :

Centre 1

Rayon $r = \frac{1}{4}$ $\Big\}$ $Z = z-1 = \frac{1}{4} e^{it} \Rightarrow z = 1 + \frac{1}{4} e^{it}$ et $dz = \frac{i}{4} e^{it}\,dt.$

$$\int_{C_1} \frac{\alpha}{z-1}\,dz = \alpha \int_{C_1} \frac{dz}{z-1} = \int \alpha \int_0^{2\pi} \frac{i\,1/4\, e^{it}\,dt}{1/4\, e^{it}} = \alpha \int_0^{2\pi} i\,dt = 2i\pi\alpha$$

$$\int_{C_2} \frac{\beta}{z+1} = 2i\pi\beta.$$

Singularité :

Les fonctions complexes sont triées par complexité.

- Sans complexité : polynômes / Séries $\Big\}$ sont définies dans $\mathbb{C}$. = fonctions entières

- Complexité : Quotient "$\frac{F}{G}$" de fonctions entières.

Condition : il faut que les points soient isolés. Défini en tout points sauf aux racines de G.

Pb : $e^{1/\sin 1/z}$ : singularité en 0 et $n\pi$ (0 non isolé : Hors du cadre)

Reconnaissance d'une telle singularité s

$$\lim_{z \to s} |H(z)| = +\infty$$

Sinon on parle de singularité essentielle : (la singularité se reconnait à la limite du module qui n'est pas « sympatique » cf. Coltet)

<u>ex</u> : $e^{1/z}$ (pb en 0)

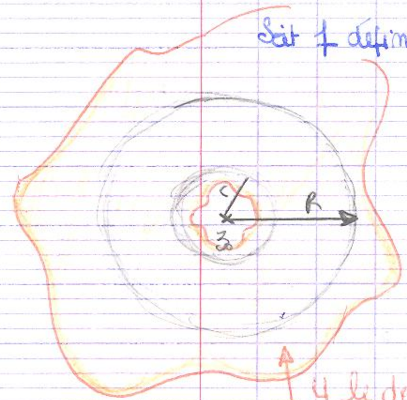
$|e^{1/z}| = ?$

on approche de 0 par tous les chemins

$$\begin{cases} z = x \in \mathbb{R}^+ & x \to 0^+ & f(z) = e^{1/x} \to +\infty \\ z = x \in \mathbb{R}^- & y \to 0^- & f(z) = e^{-1/|x|} \to 0^+ \\ z = iy \quad y \in \mathbb{R} & & f(z) = e^{1/z} = e^{1/iy} = \underbrace{e^{i(-1/y)}}_{\text{Complexe de module 1}} \end{cases}$$

## Théorème de Laurent / Serie de Laurent

Soit $f$ défini dans une couronne




↑ à le domaine Pas simplement connexe

$f$ definie et localement holomorphe $\Leftrightarrow$ conditions de cauchy verifiées.

$$r < |z - z_0| < R$$

<u>exemple</u> : $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans la couronne $1 < |z| < 2$

$r = 1$ et $R = 2$

Decomposition en élements simples :

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)} = \frac{-1}{2-z}^{②} - \frac{1}{z-1}^{①} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - z/2} + \frac{1}{1-z}$$

$|z| < 2 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right| < 1$

$z \neq 0$

Devellopable en serie entière

② $\frac{1}{2}\left(1 + z/2 + z^2/2^2 + \ + z^n/2^n \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

① $-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - 1/z} = -\frac{1}{z}\left(1 + 1/z + 1/z^2 + \ + 1/z^n + \dots\right)$

$= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \dots - \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{z^{n+1}}$

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{\substack{n=0 \\ n=1}}^{\infty} (-1) \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

exposants positifs

exposants negatifs : $\frac{1}{z^n} = z^{-n}$

Cas où il n'y a qu'un nb fini de termes à exposants négatifs

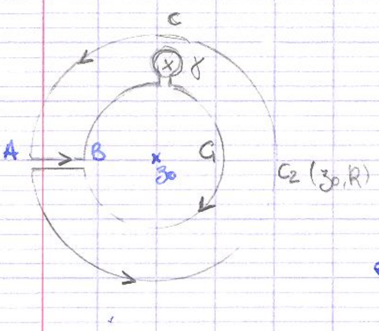
$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)}}_{\text{qq termes négatifs à exposants}} + \underbrace{1 + (z-1) + (z-1)^2 \ldots}_{\text{série entière}}$$

$$(z-1)^3 \cdot f(z) = g(z) = 1 + (z-1) + (z-1)^2 + \ldots + (z-1)^{n+3}$$
$$= 1 + X + X^2 + \quad + X^{n+3}$$
$$= \frac{1}{1-X} = \frac{1}{1(z-1)} = \frac{1}{2-z} \longrightarrow f(z) = \frac{1}{(2-z)(z-1)^3}$$

## Théorème

Soit $f$ définie dans une couronne : $r < |z - z_0| < R$ $\quad z_0$ le centre du disque.

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$




$$f(z) = \int_{C_2}^{+} + \cancel{\int_{AB}} + \int_{\text{arc}BC}^{D} + \cancel{\int_{CD}} + \int_{\gamma -} + \cancel{\int_{DC}} + \int_{\text{autre arc}} + \cancel{\int_{BA}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2i\pi}\int_{C_2}^{+} + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_1}^{+} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma +} = f(z).$$

$$* \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{C_2}^{+} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \int_{C_2}^{+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0) + (z_0 - z)}\,d\xi$$

$$|\xi - z_0| > |z - z_0| = |z_0 - z|$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} = \frac{1}{(\xi - z_0)}\sum_0^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)^n$$

$$* \quad \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \int_{C_1}^{+} \frac{f(\xi)}{-(z - z_0)\left(1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)}\,d\xi = \sum \frac{1 \;{}^{-n}}{(z - z_0)^{n+1}} \int_{C_1} f(\xi)(\xi - z_0)^n\,d\xi$$

$$= \sum (z - z_0)^n \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

Série de Laurent.

NB : pour obtenir une SL (série de Laurent),

- version 1 : les intégrales (à éviter)
- version 2 : $h(z) = \dfrac{f(z) \leftarrow \text{DSE}}{g(z) \leftarrow \text{DSE}}$ } quotient des 2.

Pour le DSL en SL : $\dfrac{f(z)}{(z-1)^N}$ $\quad N$ fixé $\quad z_0 = 1$.

exemple de dev en SL :

$\dfrac{e^{z}}{(z-1)^3}$ Dse de $e^{z}$ en 1 : $z = 1+h$ $(h = z-1)$

$e^{z} = e^{1+h} = e.e^{h}$

$= e\left(1+h+\dfrac{h^2}{2!}+\dfrac{h^3}{3!}+\dots+\dfrac{h^n}{n!}+\dots\right)$

$= e\left(1+(z-1)+\dots+\dfrac{(z-1)^n}{n!}\right)$


$f(z) = \dfrac{e}{(z-1)^3} + \dfrac{e}{(z-1)^2} + \dfrac{e}{2!(z-1)} + \dfrac{e}{3!} + \dots + \dfrac{e^{n-3}}{n!}$

Application au calcul d'intégrales :

$f = \sum_{0} a_n z^n + \sum_{n\geq 0} a_n z^n$

Pour un des pôles : $\int f = \sum \int f = \sum \int \left(\sum_{n=0} a_n z^n dz + \sum_{n\geq 0} a_n z^n dz\right)$

Si pas de pole $\int = 0$.

$n \leqslant -2 \rightarrow \int = 0$

$n = -1 \rightarrow a_{n-1} \int \dfrac{dz}{z} = 2i\pi \cdot a_{n-1}$

Résidu : $a_{n-1}$ ds la Série de Laurent (?)

à faire $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$ changement de variable (règle de Bioche)

- fract° rationnelle en éléments simples.
- on intègre

$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \dfrac{z - 1/z}{2i}$ avec $z = e^{ix}$